

$$n=2$$

$$\pi, \lambda$$

$$\pi \cap \lambda \leftarrow \pi \cap \lambda = \{P\}$$

$$\pi \cap \lambda = \phi \Rightarrow \pi // \lambda$$

$$n=3$$

$$\pi \cap \lambda$$

$$\pi \cap \lambda \leftarrow \pi \cap \lambda = \{P\}$$

$$\pi \cap \lambda = \phi \text{ e } \pi // \lambda$$

$$\pi \cap \lambda = \phi \text{ e } \pi, \lambda$$

non sono



elementi del

fascio per P

in direzione

con i punti

di π o λ .

$$P = (x, y)$$

$$u: (ax + by + c) = 0$$

$$[(a, b, c)]$$

$$[(a, b, c)] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(a, b, c) \sim \alpha(a, b, c)$$

$$\alpha \neq 0$$

se $x_3 \neq 0$ pongo

$$\begin{cases} [(a, b, c)] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$x_3 = 1$$

$$\hat{x} = \frac{x_1}{x_3} \quad \hat{y} = \frac{x_2}{x_3}$$

$$(*) \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \quad \text{con } \hat{x}_3 \neq 0$$

$$\Rightarrow a \frac{x_1}{x_3} + b \frac{x_2}{x_3} + c = 0 \Rightarrow \hat{x} = \frac{x_1}{x_3}, \hat{y} = \frac{x_2}{x_3}$$

$$(*)' \quad ay \hat{x} + b \hat{y} + c = 0$$

$$\text{con } x_3 = 0 \quad \text{la } (*) \text{ diventa } ax_2 + bx_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$S = L(-b, a, 0)$ corrisponde
ad un vettore che identifica
la direzione di n cioè
il suo vett. di traslazione.

↓
no.

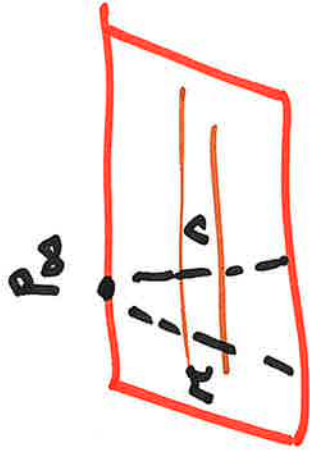
$\mathbb{P}^n \mathbb{K}$

geometria
ampiata
proiettiva.



$AG_n(\mathbb{K})$

geometria
affine



[PUNTI
PROPRI]



PUNTI
DI $AG_n(\mathbb{K})$

→ punti di "foglia"
della retta.

[PUNTI
IMPROPRI]



DIREZIONI
DI $AG_n(\mathbb{K})$

[SOTTOSPAZIO
AMPIATO]



SOTTOSPAZIO
DI $AG_n(\mathbb{K})$

"
[PUNTI PROPRI
DEL SOTTOSPAZIO]

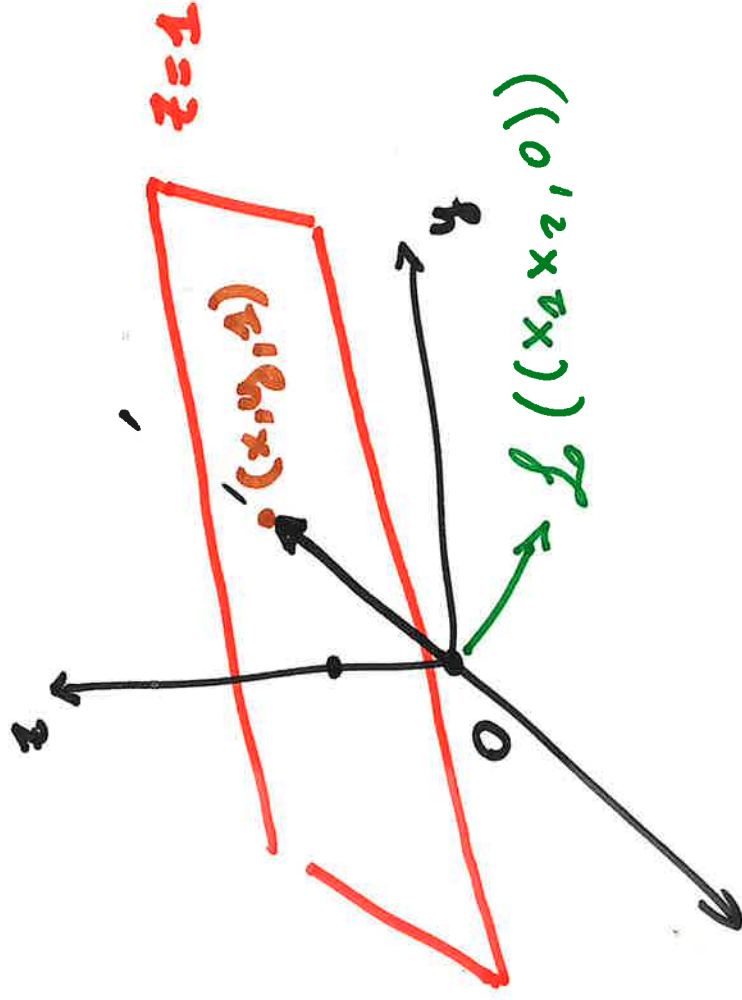


[DIREZIONI CONTENUTE
NEL SUB SP. DI TRASLAZIONE]

$AG_2(\mathbb{K})$

vogliamo vedere
contemp. i punti
propri ed i punti
impropri come
"oggetti dello stesso
tipo".

$\mathbb{K}^3$



Il punto $(x, y, 1)$ lo posso vedere come inf. del
sottospazio vettoriale $L((x, y, 1))$ con $z=1$.

Viceversa: via $L((x_2, x_2, x_3))$ un sott. vett. di $\dim=1$

se $x_3 \neq 0 \Rightarrow L((x_1, x_1, x_3)) \cap [z=1]$ nel solo punto $(\frac{x_2}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1)$

consideriamo adesso

$$S_{\infty} := \mathcal{L}((x_1, x_2, 0))$$

$$S_{\infty} \cap [z=1] = \emptyset$$

2. S_{∞} è una retta per

$(0,0,0)$

che è parallela al piano

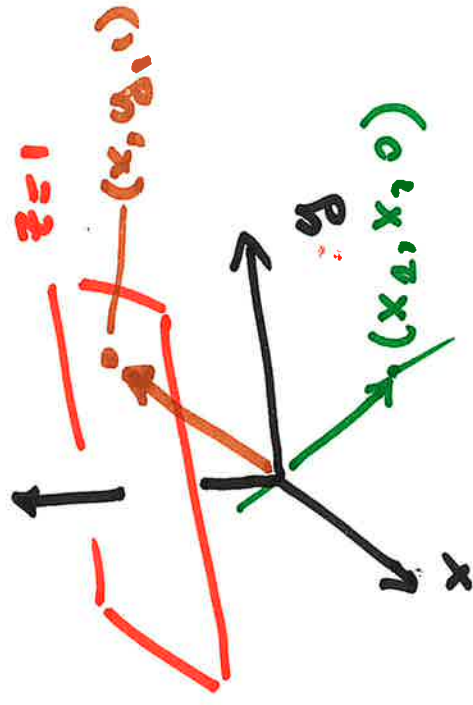
di eq. $z=1 \Rightarrow$ identifichiamo

una direzione della giacitura

di $[z=1] \Rightarrow$ identifichiamo

punto improprio di $[z=1]$

$x_3 \neq 0 \Rightarrow$ corrisponde al punto $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$ di $AG_2(\mathbb{K})$;
 improprio se $x_3=0$ ed allora corrisponde alla direzione
 $\mathcal{L}((x_1, x_2))$ di $AG_2(\mathbb{K})$.



In $\mathbb{P}^2 \mathbb{K}$ chiamiamo
 punti i sottospazi
 1-dimensionali di $\mathbb{K}^3$.
 $P = \mathcal{L}((x_1, x_2, x_3))$
 e P è proprio se

$$r \rightarrow ax + by + c = 0 \quad \text{in} \quad AG_2(\mathbb{K})$$



$$a \frac{x_1}{x_3} + b \frac{x_2}{x_3} + c = 0$$



$$\hat{r} \rightarrow ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

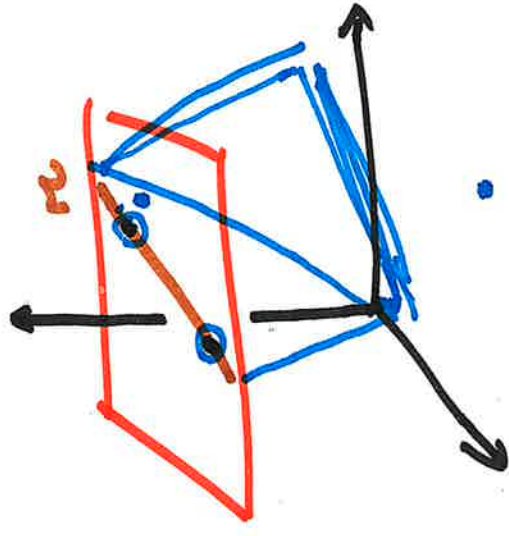
eq. omogenea della
retta.

→ ogni classe di
equivalenza è meno
di proporzionalità di
soluzioni corrisponde
ad un punto di $\mathbb{P}^2$
 $\Leftrightarrow x_3 \neq 0$.

Se $x_3 = 0 \Rightarrow ax_2 + bx_1 = 0$ cioè una m. esattamente

$L((-b, a, 0)) \rightarrow$ dir. della retta.

Ad ogni retta $r \in AG_2(\mathbb{K})$ corrisponde un sott. vett. di dim 2



in $\mathbb{K}^3$.

Def: La geometria proiettiva $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ è la struttura geometrica i cui punti sono dati dai sottospazi 1-dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$ e i cui sottospazi t-dimensionali sono dati dai sott. vettoriali $(t+1)$ -dimensionali di $\mathbb{K}^{n+1}$ e l'incidenza è l'inclusione.

⚠ $\begin{matrix} \text{dimensione} & \text{dimensione} \\ \text{proiettiva} & \text{vettoriale} \\ & -1 \end{matrix}$
(geometria)

Oss: Sia $AG_n(\mathbb{K})$ una geometria affine con un riferimento affine fissato Π .

Allora la funzione $A G_n(K) \rightarrow P^n(K)$

$$p = (x_1 \dots x_n) \longmapsto L((x_1 \dots x_n, 1))$$

è iniettiva.

Inoltre se

$$\pi \subseteq A G_n(K)$$

sottospazio

affine di $\mathbb{A}^n$.

$$AX = B$$

L'immagine di π

in P^n è data da

lo spazio vettoriale

di eq.

$$AX - x_{n+1}B = 0$$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = B \Rightarrow (A|B) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -x_{n+1} \end{bmatrix} = 0$$

↓

in particolare i
punti impropri di π
corrispondono alle soluz.
di $AX = 0 \Rightarrow$ solt. di
traslazione di π .

In generale, dato $\hat{P} = L((x_2 \dots x_n x_{n+1})) \in \mathbb{P}^n | K$.

• Se $x_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \hat{P}$ è immagine del punto proprio (affine)

$$P = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}} \right).$$

• Se $x_{n+1} = 0 \Rightarrow \hat{P}$ corrisponde alla direzione

$$L((x_2 \dots x_n)).$$

⚠ Le coordinate in $\mathbb{P}^n | K$ sono dette coordinate omogenee. Ad ogni punto (proprio o improprio) corrispondono ∞^2 vettori che lo rappresentano, tutti non nulli e proporzionali fra loro.

$$[(1, 2, 3)] = [(2, 4, 6)] = L\left(\frac{1}{3} \frac{2}{3} 1\right) \leftarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{IK^{n+1} \setminus \{0\}}{IK^*}$$

le coord. omogenee corr.
a classi di prop. di vettori
non nulli.

Supponiamo $n=2$ e $f(x,y)=0$ una equazione.

$$V(f) = \{ (x,y) \in A : f(x,y)=0 \} \subseteq AG_2(K).$$

Consideriamo il polinomio omogeneizzato

$$F(x_1, x_2, x_3) := x_3^{\deg f} f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$$

Oss. le soluzioni di $F(x_1, x_2, x_3)=0$ con $x_3 \neq 0$
corrispondono a soluzioni di $f(x,y)=0$

$$\tilde{V}(F) = \{ [(x_2, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}^2 \mid F(x_1, x_2, x_3) = 0 \}.$$

I punti di $\tilde{V}(F)$ con $x_3 = 0$ sono detti punti impropri della curva $V(F)$.

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^3 - 6$$

$$x_3^3 f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = x_3^3 \left(3 \frac{x_1^2}{x_3^2} + 2 \frac{x_2^3}{x_3^3} - 6 \right) =$$

$$= 3x_1^2 x_3 + 2x_2^3 - 6x_3^3 = F(x_1, x_2, x_3)$$

N.B.: Se $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ è soluzione di una eq. omogenea $\Rightarrow$ anche $\alpha(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ lo è.

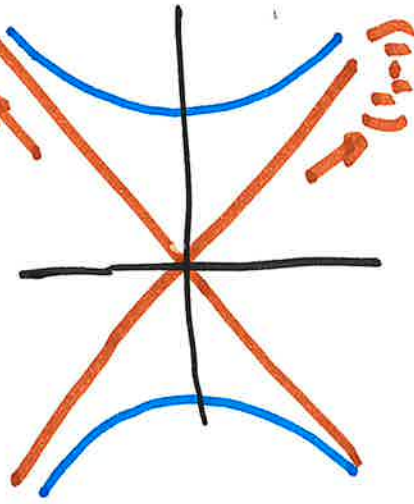
$$K = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = xy - 1$$

$$xy - 1 = 0$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

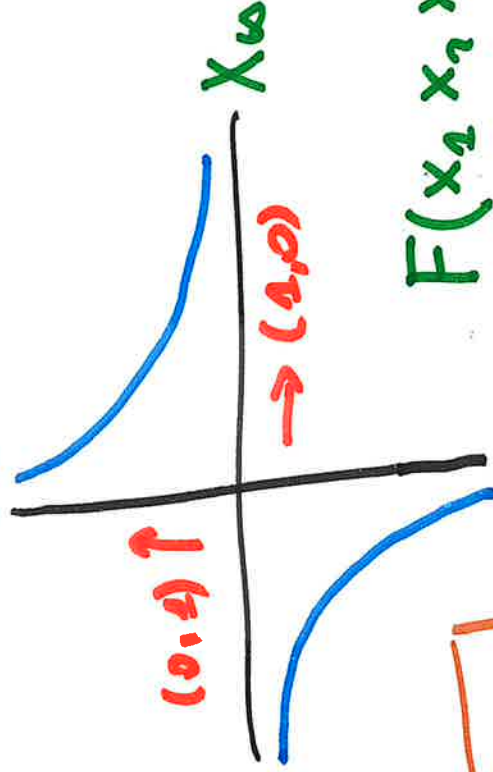


$$x_1^2 - x_2^2 = x_3^2$$

$$x_3 = 0$$

$$(x_2^2 - x_1^2) = 0 \rightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 0$$

$$[(1, -1, 0)] \quad [(1, 1, 0)]$$



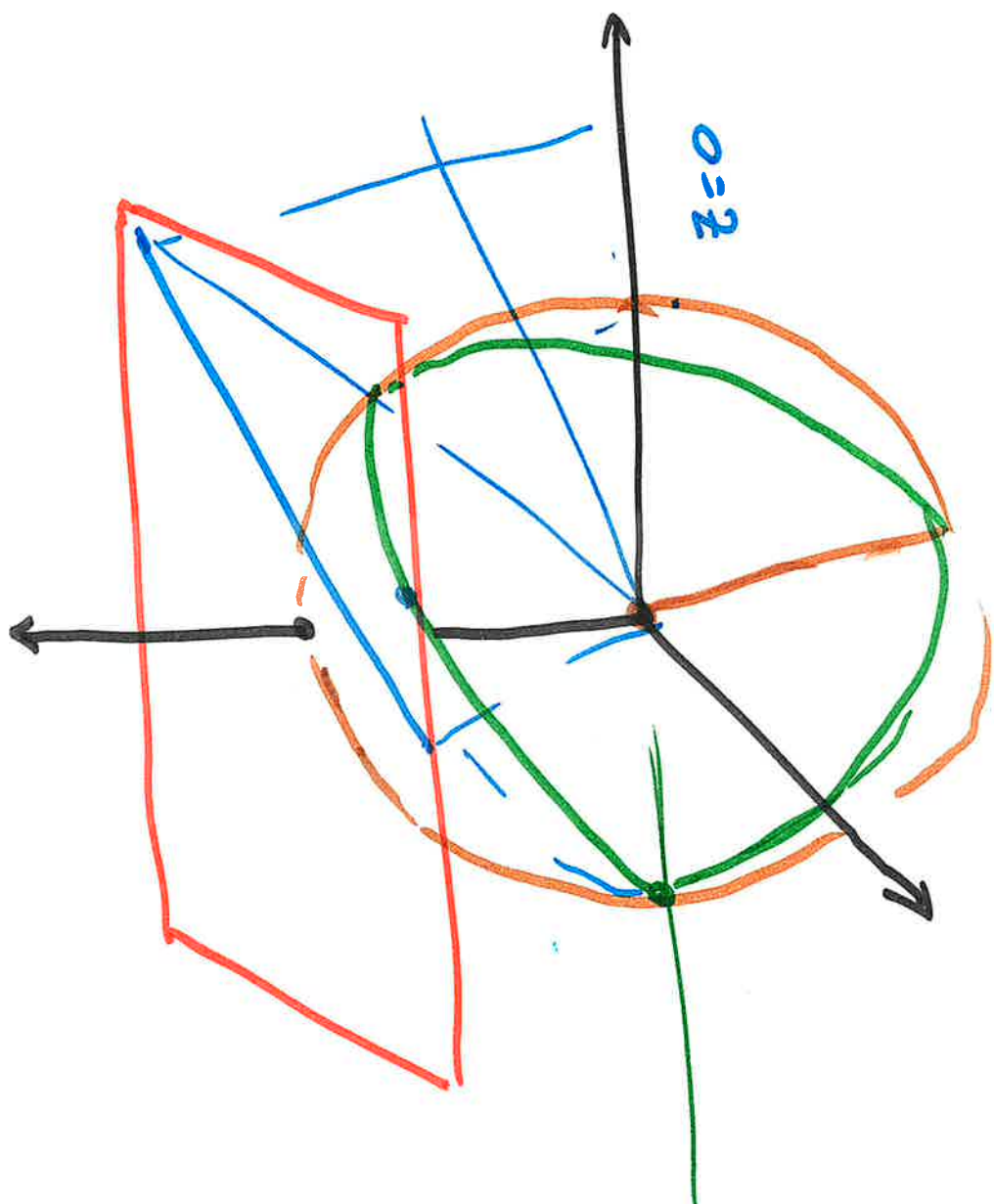
$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 - x_3^2$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 x_2 = 0$$

i punti impropri sono

$$y_0 = [(0, 1, 0)] \quad [(1, 0, 0)] = x_\infty$$



Teorema: In $AG_2(K)$ due rette distinte non
parallele.

DIM: passiamo in $P^2 K$.

r ed s non rapp. in $P^2 K$ da 2 spazi
vettoriali $\hat{r}$ e $\hat{s}$ di dim vettoriale 2 contenuti

in $K^3 \Rightarrow \dim_v(\hat{r} \wedge \hat{s}) \geq 1$

perché per Grassmann $\dim \hat{r} + \dim \hat{s} = 4 > 3$

$\Rightarrow \hat{r}$ ed $\hat{s}$ si intersecano sempre in almeno un
punto di $P^2 K$. Se non ci sono punti

propri in comune $\Rightarrow$ questo deve essere un

punto improprio $\Rightarrow \hat{r}$ e $\hat{s}$ non parallele (per def) $\square$

retta per 2 punti in $\mathbb{P}^n/K$.

$$n=2 \quad P = [x'_1 \ x'_2 \ x'_3]$$

$$\mathcal{L}((x'_1 \ x'_2 \ x'_3)) \neq \mathcal{L}((x''_1 \ x''_2 \ x''_3))$$

$$Q = [x''_1 \ x''_2 \ x''_3]$$

$$\hat{H}_0 = \mathcal{L}((x'_1 \ x'_2 \ x'_3), (x''_1 \ x''_2 \ x''_3))$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{cioè} \quad \det \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{pmatrix} = 0$$

P, Q propri e cerchiamo i pt. propri della retta

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$x(y_P - y_Q) - y(x_P - x_Q) + (x_P y_Q - y_P x_Q) = 0$$

$$P = [(x_P, y_P, 1)]$$

$$Q = [(l \ m \ 0)]$$

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ l & m & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-x \cdot m + y \cdot l + m x_P - l y_P = 0$$

$$(x - x_P)m - (y - y_P)l = 0$$

$$P = [(x_P, y_P, 0)]$$

$$Q = [(x_Q, y_Q, 0)]$$

$x_3 = 0$ non è una retta di

$AG_2(K)$ ma è

l'insieme di tutti i punti

impropri di $\mathbb{P}^2(K) \rightarrow$

retta (iperpiano) improprio o iperpiano
all'infinito.

